Exercice Corrigé

Groupe A2 : El hija | El hassen
Marième | Ahmed bombe
Fatimetou | Mouhamed Hamdy

Classe : 7C1

Etablissement : Erraja 1 - Carrefour

EXERCICES

Exercice 1

Déterminer le module et un argument, puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivant:

$(2-2i)^5, \dfrac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}, \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}, \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}, \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8, \dfrac{(-2i)(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^4}$

Solution:

$z_1 = (2-2i)^5$

$|z_1| = |2-2i|^5 = (2\sqrt{8})^5$

$\arg z_1 = \arg (2-2i)^5$

$= 5 \arg(2-2i)$

$= 5\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \arg z_1 = \frac{3\pi}{4}$

Alors : $z_1 = (2\sqrt{2})^5 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_1 = (2\sqrt{2})^5 \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= (2\sqrt{2})^5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$\boxed{z_1 = -\frac{(2\sqrt{2})^5}{\sqrt{2}} + \frac{(2\sqrt{2})^5}{\sqrt{2}}i}$ F.A

$z_2 = \frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = (1-i\sqrt{3})^{-10}$

$|z_2| = |1-i\sqrt{3}|^{-10} = 2^{-10}$

$\arg z_2 = -10 \arg(1-i\sqrt{3})$

$= -10\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$

$\Rightarrow \arg z_2 = \frac{4\pi}{3}$

$\frac{1}{2}$

$z_2 = 2^{-10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-2^{-10}}{2} - i\frac{2^{-10}\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{z_2 = -2^{-11} - i\,2^{-11}\sqrt{3}}$ F.A

$z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$|z_3| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg z_3 = \frac{7\pi}{12}$

$z_3 = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{1+3}$

$\boxed{z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}}$ F.A

$z_4 = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$

$|z_4| = 1$ car de type $\frac{u}{\bar{u}}$

$z_4 = \frac{(1+\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)}$

$= \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})i - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2+1}(1+i)$

$\Rightarrow \arg z_4 = \frac{\pi}{4}$ car de type $a(1+i)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

$z_4 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ F.A

$z_5 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$

$z_5 = \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\right)^4$

$= \left((2+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)^4$

$= (2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2})^4$

$= \left(2\sqrt{2}(1+i)\right)^4 = \left(2\sqrt{2}.\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$

$z_5 = \left(4e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 256.e^{i\pi}$

$|z_5| = 256$ et $\arg(z_5) = \pi$

$\boxed{z_5 = -256}$ F.A

$z_6 = \frac{(-2i)(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^4}$

$z_6 = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}.\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}$

$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}.\,2^{12}e^{i4\pi}}{(\sqrt{2})^4.\,e^{i\pi}}$

$= \frac{2^{13}.\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2^2.\,e^{i\pi}}$

$z_6 = 2^{11}.e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

$z_6 = 2^{11}.e^{i\frac{\pi}{2}}$

$|z_6| = 2^{11}$ et $\arg(z_6) = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{z_6 = 2^{11}.i}$ F.A

Group A_2 : $7C_1$ - Erraja 2/2

Exercice 4

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\arg\frac{z+2i}{z-i}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$
2. $\arg\frac{z+2i}{z-i}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$
3. $\arg\frac{z+1-2i}{z-1-3i}=\frac{\pi}{3}\quad[\pi]$
4. $\arg(z-2-2i)=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$

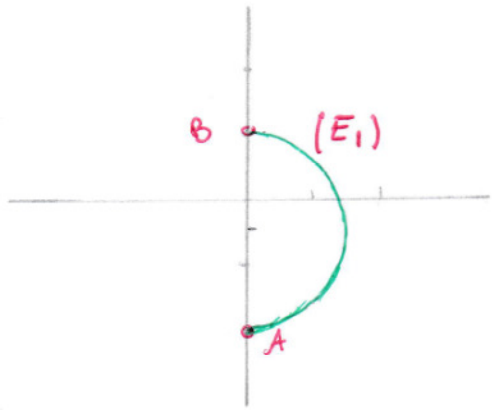
Solution :

1) $\arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$A(-2i)$, $B(i)$

$(\overrightarrow{\Pi B},\overrightarrow{\Pi A})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

L'ensemble c'est le demi cercle de diamètre $[AB]$ privé A et B

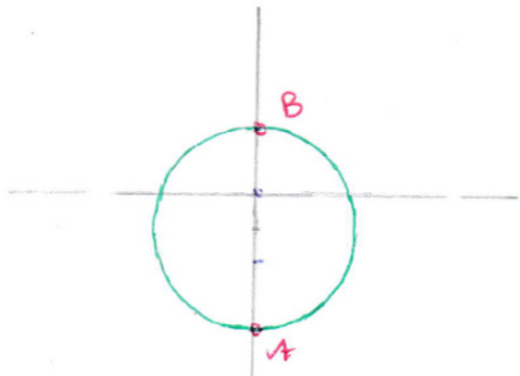


2) $\arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}$ ou

$\arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)=\frac{-\pi}{2}$

L'ensemble c'est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B



3) $\arg\left(\frac{z+1-2i}{z-1-3i}\right)=\frac{\pi}{3}\ [\pi]$

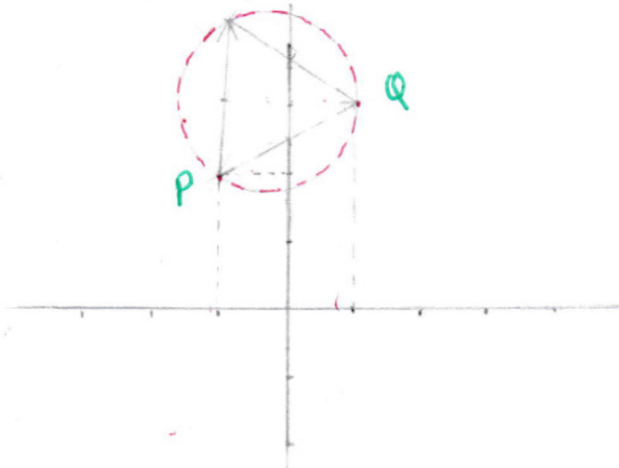
$\Rightarrow$ on pose $P(-1+2i)$, $Q(1+3i)$

$(\overrightarrow{\Pi Q};\overrightarrow{\Pi P})=\frac{\pi}{3}\ [\pi]$

$(\overrightarrow{\Pi Q},\Pi P)=\frac{\pi}{3}$ ou

$(\overrightarrow{\Pi Q},\overrightarrow{\Pi P})=-\frac{\pi}{3}$

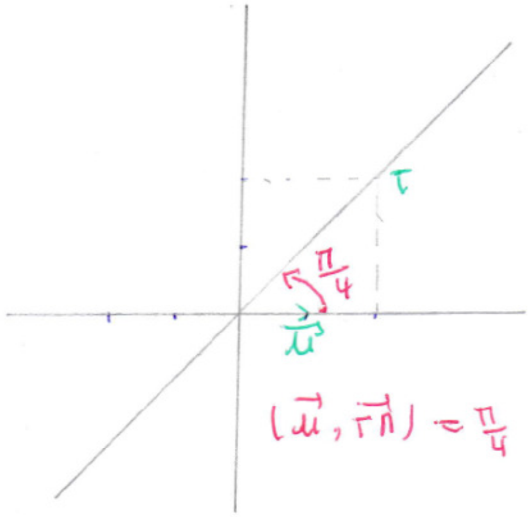
L'ensemble c'est le cercle circonscrit au triangle PQR équilateral indirect privé de P et Q



4) $\arg(z-2-2i)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Soit $T(2+2i) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{TM}) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ L'ensemble de point c'est la demi droit passant par T la demi bisctrice (bisectrice internt) le demi droite $[TM)$ qui argument égal $\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ d'origine $\vec{u}$



Le caracteristique analytique de cet ensemble $\begin{cases} x = y \\ x > 2 \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$$

$$z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$$

1) $z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

• Soit $z_0=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ la solution réel de l'équation

$E : z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

Alors :

$\alpha^3-(6+3i)\alpha^2+(21+19i)\alpha-26(1+i)=0$

$\alpha^3-6\alpha^2-3i\alpha^2+21\alpha+19i\alpha-26-26i=0$

$(\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26)+(-3\alpha^2+19\alpha-26)i=0$

• On résout le système :

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26=0 & (1)\\ -3\alpha^2+19\alpha-26=0 & (2)\end{cases}$$

$-3\alpha^2+19\alpha-26=0$

$\Delta=(19)^2-4(-3\times(-26))$

$\Delta=361-312$

$\Delta=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$

$\alpha_1=\dfrac{-19+7}{-6}=2$

$\alpha_2=\dfrac{-19-7}{-6}=\dfrac{13}{3}$

D'après (2) on trouve : $\alpha_1=2$, $\alpha_2=\dfrac{13}{3}$

En remplaçant dans (1) on trouve que $\alpha_1=2$ vérifie (1) et $\alpha=\dfrac{13}{3}$ ne vérifie pas (1)

Alors : $\boxed{z_0=2}$

• On pose $P(z)=z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$

	1	$-6-3i$	$21+19i$	$-26-26i$
2		2	$-8-6i$	$26+26i$
	1	$-4-3i$	$13+13i$	0

Alors:

$$\boxed{P(z)=(z-2)(z^2-(4+3i)z+13+13i)}$$

Groupe A_2 : $7C_1$ - Erraja ½

• Resolvons L'équation :

$z^2-(4+3i)z+13+13i=0$

$\Delta=(4+3i)^2-52-52i=-45-28i$

Par le calcul on obtient une racine carrée $\boxed{\delta=2-7i}$

$z_1=\dfrac{4+3i+2-7i}{2}=3-2i$

$z_2=\dfrac{4+3i-2+7i}{2}=1+5i$

• Ensemble de solution :

$S=\{2,\ 3-2i\ ;\ 1+5i\}$

2) $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$

E admet une solution $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha^3-(11+2i)\alpha^2+2(17+7i)\alpha-42=0$

$\begin{cases}\alpha^3-11\alpha^2+34\alpha-42=0 & (1)\\ -2\alpha^2+14\alpha=0 & (2)\end{cases}$

d'après (2) on trouve :

$\alpha_1=0$ et $\alpha_2=7$

on remplaçant dans (1)

on trouve que $\alpha_2=7$ verifie (1)

et que $\alpha_1=0$ ne verifie pas (1)

Alors : $\boxed{z_0=7}$

On pose : $p(z)=z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42$

On factorise par $(z-7)$

	1	$-11-2i$	$34+14i$	-42
7		7	$-28-14i$	42
	1	$-4-2i$	6	0

Alors : $P(z)=(z-7)(z^2-(4+2i)z+6)$

• Resolvons L'équation :

$z^2-(4+2i)z+6=0$

$\Delta=(4+2i)^2-4(6)=-12+6i$

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta=2+4i$

$z_1=\dfrac{4+2i+2+4i}{2}=3+3i$

$z_2=\dfrac{4+2i-2-4i}{2}=1-i$

• Ensemble de solution

$S=\{7,\ 3+3i\ ;\ 1-i\}$

2/2

Exercice 10

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1.Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

et que $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution

1) $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\alpha = z + z^2 + z^4$

$\overline{\alpha} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4$

$z^7 = 1$, Car $z^7 = \left(e^{\frac{i2\pi}{7}}\right)^7 = e^{i2\pi}$

on a :

$\overline{z} = \frac{1}{z} = \frac{z^7}{z} = z^6$

$\overline{z}^2 = \frac{1}{z^2} = \frac{z^7}{z^2} = z^5$

$\overline{z}^4 = \frac{1}{z^4} = \frac{z^7}{z^4} = z^3$

Alors :

$\overline{\alpha} = z^6 + z^5 + z^3$

• $\alpha + \overline{\alpha} = z + z^2 + z^4 + z^6 + z^5 + z^3$

on ajoute 1 Sur le deux membres on a :

$1 + \alpha + \overline{\alpha} = \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}_{S.G\ de\ q=z}$

$1 + \alpha + \overline{\alpha} = \frac{1 - z^7}{1 - z}$ / $z^7 = 1$

$1 + \alpha + \overline{\alpha} = 0$

D'ou $\boxed{\alpha + \overline{\alpha} = -1}$

• $\alpha \cdot \overline{\alpha} = (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3)$

$\alpha \cdot \overline{\alpha} = z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7$

$z^8 = z \cdot z^7 = z$

$z^9 = z^2 \cdot z^7 = z^2$

$z^{10} = z^3 \cdot z^7 = z^3$

$\alpha \cdot \overline{\alpha} = \underbrace{z^7 + z^7}_{2} + \underbrace{z^7}_{1} + z^8 + z^9 + z^{10} + z^4 + z^5 + z^6$

$= 2 + \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}_{0}$

$\alpha \cdot \overline{\alpha} = 2 + 0$

D'ou $\boxed{\alpha \times \overline{\alpha} = 2}$

Groupe N°: 7c, - Erraja 1/2

2) On a : $\alpha = z + z^2 + z^4$

tel que $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^4$$

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$$

$$\alpha = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right) + i\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

$\mathcal{R}(\alpha) = \dfrac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$ / $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R}(\alpha) = -\frac{1}{2}}$

D'où

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

Alors : $\alpha = -\frac{1}{2} + iy$

avec $y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

on a $\alpha \cdot \bar{\alpha} = 2 \Rightarrow |\alpha|^2 = 2$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2$$

$$\frac{1}{4} + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - \frac{1}{4}$$

$$y^2 = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

On a $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

Alors $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ et

$$y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$$

La fonction sinus est croissante et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

x	0 $\frac{\pi}{7}$ $\frac{2\pi}{7}$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$0 \nearrow 1$

alors

$\sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$

$\Rightarrow \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$

comme $\frac{4\pi}{7} > 0$

on a alors $y > 0$ donc

$$y = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

D'où

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Groupe A_2 : $7C_1$ - Evraja

2/2

Exercice 13

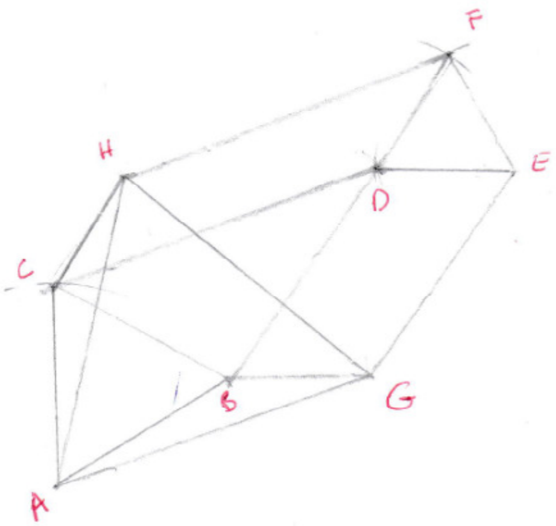
Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.

1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.

2) Exprimer g en fonction de b,d et e ; puis h en fonction de c,d et f.

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

Solution :



1) ABC est équilatéral direct

$$\Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)}$$

Groupe Bac Zc1 · Errafa

DEF est équilatéral direct

$$\frac{z_F - z_D}{z_E - z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{f-d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)}$$

2) * EDBG est un parallélogramme

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow z_G - z_B = z_E - z_D$$

$$g-b = e-d \Leftrightarrow \boxed{g = b+e-d}$$

* DCHF est un parallélogramme

$$z_H - z_C = z_F - z_D$$

$$h-c = f-d \Rightarrow \boxed{h = c+f-d}$$

3) On calcule $\frac{h-a}{g-a}$ $\Rightarrow$; $g-a = b+e-d-a$

1/2

$$h - a = c - a + f - d$$

$$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$$

$$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a + e - d)$$

$$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$$

$$\frac{h - a}{g - a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow AGH$$

est equilaterale direct

Exercice 16

Soit a un nombre complexe non nul. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que lés points d'affixes a, aj, aj^2 dans cet ordre, sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Solution :

Soit

$A(a)$, $B(aj)$, $C(aj^2)$

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

$\bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$

$1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{aj^2 - a}{aj - a} = \frac{a(j^2-1)}{a(j-1)}$$

$$= \frac{a(\cancel{j-1})(j+1)}{a(\cancel{j-1})}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = j + 1$$

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

Groupe A2 17e1 - Erraja

Exercice 19 Bac

Dans le plan orienté, OAB est un triangle direct non rectangle. On construit les carrés directs AONP, OBCU et BATI. On muni le plan d'un repère orthonormal d'origine O tel que n et b soient les affixes respectives de N et B.

1) Déterminer les affixes de A et U.

2) Démontrer que $AU = BN$ et $(AU)\perp(BN)$. Quelles sont les relations semblables qu'on peut déduire ?

3) Soit G le point tel que OUGN soit un parallélogramme. Démontrer que le triangle GPC est isocèle rectangle direct.

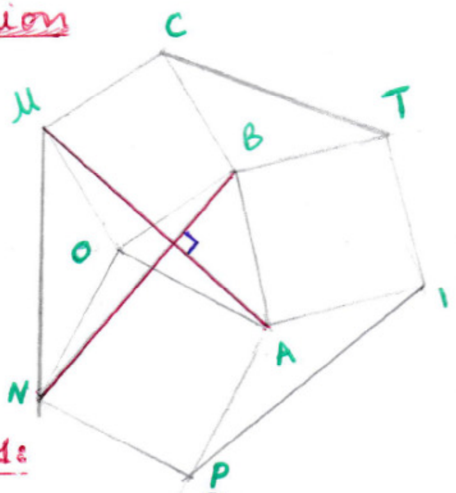
4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et r le quart de tour direct de centre O.

a) Déterminer l'image de G par rot.

b) Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Montrer que r(C') = C puis déterminer rot(B).

c) En déduire que $AC = GB$ et $(AC)\perp(GB)$.

Solution



1)

- Methode 1:

Soit $R(O, \frac{\pi}{2})$: $R(N) \to A$

$z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$

$z_A - 0 = i(n - 0)$

$\boxed{z_A = in}$

• $R(B) \to U$

$(z' - z_O) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$

$z_U - 0 = i(b - 0)$

$\boxed{z_U = ib}$

- Methode 2:

Comme ONA est rectangle en O isocèle et directe on a donc:

$\frac{z_A - z_O}{z_N - z_O} = i \Rightarrow \frac{a - 0}{n - 0} = i \Rightarrow \frac{a}{n} = i$

$\boxed{a = in}$

de même OBU est rectangle en O isocèle et directe

D'où :

$\frac{u - 0}{b - 0} = i \Rightarrow \boxed{u = bi}$

2) $\frac{u - a}{b - n} = \frac{bi - ni}{b - n} = \frac{i\cancel{(b-n)}}{\cancel{b-n}} = i$

Donc $\begin{cases} \left|\frac{u-a}{b-n}\right| = 1 \\ \text{et } \arg\left(\frac{u-a}{b-n}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

D'où $\boxed{AU = NB \quad (AU)\perp(NB)}$

Les relation semblable:

et $OT = BP$ et $(OT) \perp (BP)$

$OI = CA$ et $(OI) \perp (CA)$

3) Mq GPC est isocèle rectangle directe:

$\vec{UC} = \vec{OB} \Rightarrow z_C - z_U = z_B - z_O$

$z_C = z_B + z_U = b + ib \Rightarrow \boxed{z_C = b(1+i)}$

$\vec{AP} = \vec{ON} \Rightarrow z_P - z_A = z_N - z_O$

$z_P = z_N + z_A = n + in \Rightarrow \boxed{z_P = n(1+i)}$

$\vec{UG} = \vec{ON} \Rightarrow z_G - z_U = z_N - z_O$

$z_G = z_N + z_U = n + ib \Rightarrow \boxed{z_G = n + ib}$

on a:

$$\frac{z_C - z_G}{z_P - z_G} = \frac{b + \cancel{bi} - n - \cancel{ib}}{\cancel{n} + ni - \cancel{n} - ib} = \frac{b-n}{ni-ib}$$

$$= \frac{i\cancel{(-ib+in)}}{\cancel{ni-ib}} = i$$

Alors GPC est isocèle rectangle directe.

4) $T = t_{\vec{GN}}$, $r = r(O, \frac{\pi}{2})$

$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{GN}}$

$r(O, \frac{\pi}{2})(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$

$T(M) = M' \quad z' = z + (z_N - z_G)$

$= z - ib$

$r(O, \frac{\pi}{2})(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz$ / $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$

a) Déterminer rot

$z \xrightarrow{t} z_1 \xrightarrow{r} z'$

$z \longrightarrow z_1 = z - ib$, $z_1 \longrightarrow z' = iz_1$

rot: $z' = iz_1 = i(z - ib)$

$z' = iz + b$

$\boxed{rot(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz + b}$

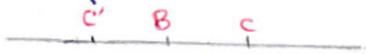
$rot(G) = G' \Rightarrow z_{G'} = i z_G + b$

$\Rightarrow z_{G'} = i(n+ib) + b = in$

$\boxed{rot(G) = A}$

b) Soit $C' = S_B(C)$

Mq $r(C') = C$



$\vec{BC'} = \vec{CB}$

$z_{C'} - z_B = z_B - z_C$

$z_{C'} = 2z_B - z_C \Rightarrow z_{C'} = 2b - b - bi$

$z_{C'} = b(1-i)$

$\Rightarrow r(C') = C \Leftrightarrow z_C = i z_{C'}$

$= i(b - ib) = ib + b$

$= b(1+i) = z_C$

$\Rightarrow \boxed{r(C') = C}$

$rot(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = i z_B + b$

$z_{B'} = ib + b = b(1+i) = z_C$

$\Rightarrow \boxed{rot(B) = C}$

c) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_G} = \dfrac{b + bi - in}{b - n - ib}$

$= \dfrac{i\cancel{(-ib + b - n)}}{\cancel{ib + b - n}} = i$

Donc $\begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_C}\right| = 1 \\ \text{et } \arg\left(\dfrac{c-a}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2} \, [2\pi] \end{cases}$

D'où $AC = GB$ et $(AC) \perp (GB)$